Ejercicios de Análisis Matemático
Aplicaciones de las integrales

1. Calcula los límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_x^{2x}\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)\,\mathrm{d}t}{x^2},\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{1-\cos x}\mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}\,\mathrm{d}t}{x^2},\qquad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_{x^2}^{x}\frac{\mathrm{e}^t-1}{\operatorname{sen}(t^2)}\,\mathrm{d}t}{\log x}.$$

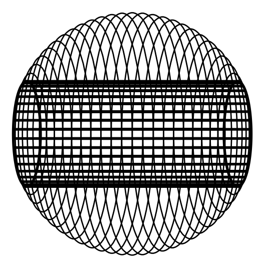
2. Calcula el área de las dos partes en que la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ divide al círculo $x^2 + y^2 = 7$.

3. Calcula la longitud de la curva de ecuación $y = \log(\cos x)$ donde $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$.

4. Calcula el área de la superficie de revolución obtenida al girar alrededor del eje OX la región limitada por la parábola $y^2 = 2x$, la recta $x = 3/2$ y el eje de abscisas.

5. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$, el eje de ordenadas y la recta $y = 1$ alrededor del eje OY.

6. Calcula el volumen de una esfera de radio 3 en la que, siguiendo un diámetro, se ha perforado un agujero cilíndrico de radio $r < 3$. Calcula el área de la superficie total del solido obtenido. Calcula los valores de r para los que dicha área alcanza sus valores extremos.



7. Calcula por el método de los discos y también por el método de las láminas o capas el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región plana limitada por la parábola $y = x^2$, el eje de ordenadas y la recta $y = 1$ alrededor de: a) El eje OX. b) El eje OY. c) La recta $y = 3$. d) La recta $x = -1$.

8. Sea Ω la región del primer cuadrante limitada por las curvas de ecuaciones $y = x^3$ e $y = 2x - x^2$. Calcula:

   a) El área de Ω.

   b) El volumen que se obtiene al girar Ω alrededor del eje OX.

   c) El volumen que se obtiene al girar Ω alrededor del eje OY.

9. Comprueba que el área de la superficie de revolución (llamada horno de Gabriel) engendrada al girar la curva $y = 1/x$, $1 \leqslant x \leqslant +\infty$, alrededor del eje OX es infinita (por tanto sería necesaria una cantidad infinita de pintura si quisiéramos pintarla) pero el volumen del sólido de revolución engendrado es finito (por tanto podemos llenarlo con una cantidad finita de pintura). Comenta a tu gusto esta aparente paradoja.

10. Calcula el área de un espejo parabólico de 3 metros de diámetro y 1 metro de fondo.

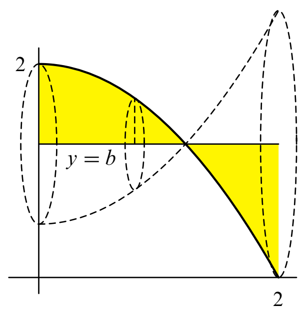
11. Calcula la longitud de la curva de ecuación $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$ donde $1/2 \leqslant x \leqslant 2$.

12. Calcula el volumen de una esfera de radio r usando el método de las láminas o capas.

13. De un tronco cilíndrico de radio 20 cm se corta una cuña dando dos cortes con una sierra mecánica que llegan hasta el centro del tronco. Si un corte se hace perpendicular al eje y el otro formando un ángulo de 30 grados con el primero, ¿qué volumen tendrá la cuña?

14. Se considera el sólido de revolución obtenido al girar la región plana limitada por la parábola $y = x^2/2$, el eje OY y la recta $y = 2$, alrededor del eje OY. Se desea taladrar dicho sólido por su eje de revolución de manera que pierda un cuarto de su volumen. Calcula el diámetro que debe tener el taladro.

15. La parte de la parábola $y = 2 - \dfrac{x^2}{2}$ donde $0 \leqslant x \leqslant 2$ gira alrededor de la recta $y = b$, donde $0 \leqslant b \leqslant 2$. Calcula el volumen del sólido resultante (que será una función de b). Calcula el valor de b que hace mínimo el volumen de dicho solido.



16. Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, calcula el área de la región plana limitada por la recta que pasa por los extremos relativos de f y la gráfica de f.

17. a) Calcula $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(xt)\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$.

    b) Calcula el área limitada por la gráfica de f y el eje OX.

18. Calcula el área de las regiones del plano limitadas por las siguientes curvas.

    a) $y = 2x - 3x^2 + x^3$ y el eje OX.

    b) $y = 6x - 5x^2 + x^3, \quad y = -3x + 4x^2 - x^3$.

    c) $x = 12y^2 - 12y^3, \quad x = 2y^2 - 2y$.

    d) $y = -x^2 - 2x, \quad y = x^2 - 4, \quad -3 \leqslant x \leqslant 1$.

    e) $y = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad y = \dfrac{1}{2+x^2}$.

    f) $x + y^2 = 3, \quad 4x + y^2 = 4$.

    g) $y = \sec^2 x, \quad y = \operatorname{tg}^2 x, \quad -\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/4$.

    h) $(y - x)^2 = x - 3, \quad x = 7$.

    i) $y = (\log x)^2, \quad 0 < x \leqslant \mathrm{e}$.

    j) $y^2 = \dfrac{1-x}{1+x}, \quad x = -1$.

    k) $y = x\,\mathrm{e}^{-x}, \quad y = x^2\,\mathrm{e}^{-x}, \quad x \geqslant 0$.

19. Calcula el área de la superficie de revolución obtenida al girar la curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$, alrededor del eje OX.

20. Calcular el área de la superficie de revolución engendrada al girar la catenaria $y = \cosh x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, alrededor del eje OX.

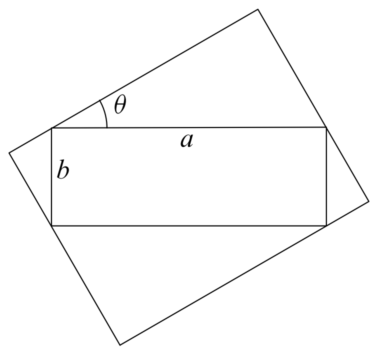
21. Sean P y Q los puntos de corte de la curva $y^2 = 2x^3$ con la circunferencia $x^2 + y^2 = 20$. Calcula la longitud de la curva $OPQO$ formada con los correspondientes trozos de las curvas anteriores, siendo O el origen de coordenadas.

22. Un sólido se genera haciendo girar la región acotada por $y = 0$ e $y = \sqrt{9 - x^2}$ alrededor del eje OY. Se perfora un orificio cilíndrico circular de radio r centrado en el eje de revolución.

    a) Calcula por el método de las láminas o capas y de los discos el volumen del sólido resultante.

    b) Calcula el área de la superficie lateral total de dicho sólido (no se considera la base). Calcula los valores de r para los que dicha área alcanza sus valores extremos.

23. Calcula el área máxima del rectángulo que se puede circunscribir alrededor de un rectángulo dado cuyos lados tiene longitudes a y b.



24. Una vasija que tiene la forma del paraboloide de revolución de eje vertical obtenido al girar la parábola $y = px^2$ alrededor del eje OY, se encuentra parcialmente llena de agua. Calcula el cociente entre el área de la superficie mojada de la vasija y el volumen de agua que contiene cuando la superficie superior del agua es un círculo de radio r.

25. Calcula la integral $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{1}{(x+a)\sqrt{x-b}}\,\mathrm{d}x$ donde $a > 0, b > 0$.

26. Un depósito subterráneo de gasolina tiene forma de cilindro de sección elíptica de semiejes a y b y longitud L. Para medir su contenido se sumerge una varilla hasta la parte inferior del depósito y se mide la altura h del nivel de gasolina. Calcula el volumen de la gasolina que contiene el depósito en función de h.